OSSERVAZIONI DIDATTICHE SULLE PROCEDURE DI DIMOSTRAZIONE E SOLUZIONE DEI PROBLEMI

Carlo Felice Manara.
Maria Molino Cantoni

OSSERVAZIONI DIDATTICHE SULLE PROCEDURE DI DIMOSTRAZIONE E SOLUZIONE DEI PROBLEMI

Carlo Felice Manara **Maria Molino Cantoni**

1. L'intenzione di coloro che hanno scritto questo articolo è quella di aiutare l'eventuale Lettore nel compito dell'insegnamento; compito che dovrebbe mirare non soltanto a presentare delle nozioni, ma soprattutto a far acquisire una mentalità ed un metodo. Ed a questo scopo pensiamo che il presentare diverse dimostrazioni di una medesima proposizione geometrica possa favorire, con il confronto, la riflessione sul significato della dimostrazione, e soprattutto la presa di coscienza dei punti di partenza e degli atteggiamenti, quasi istintivi e inconsci, che ogni singolo ricercatore adotta per riuscire nel proprio intento.

   Ripetiamo che, a nostro parere, uno dei compiti della scuola (e forse il principale) non è tanto il conferire delle informazioni o addestrare a certe abilità operative, quanto l'insegnare a comprendere, a riflettere, a pensare in modo personale ed autonomo. In altre parole riteniamo che sia fondamentale la formazione a comprendere la realtà, rispetto all'addestramento ad interagire con questa, per ottenere certi risultati.

   Pertanto non possiamo evitare di esprimere la nostra preoccupazione, ascoltando certe parole d'ordine (come quella della "Didattica breve") che appaiono pronunciate come per annunciare e convalidare certe mode didattiche le quali ci sembrano camminare in direzione esattamente opposta a quella che conduce alla formazione delle personalità degli allievi.

   Analoghe osservazioni potrebbero essere fatte relativamente ad altre parole d'ordine: per esempio quella che proclama che la matematica deve essere insegnata "per problemi". Infatti quest'ultima espressione potrebbe essere interpretata come se nascesse dal presupposto metodologico e ideologico che la matematica è, come ogni altra scienza, diretta primariamente al dominio della realtà e che soltanto questa circostanza giustifichi il suo insegnamento.

Appare ovvio che è nostra intenzione andare contro queste idee e contro gli atteggiamenti che ne conseguono e che rischiano di diventare delle imposizioni di mode di pensiero e di azione didattica.
In particolare appare interessante seguire questa condotta perché, oltre alle parole d'ordine di cui sopra, sta prendendo importanza il problema di utilizzare in modo intelligente i programmi per calcolatore che sono dedicati alla geometria. Come avviene per altri programmi, che riguardano altri campi della matematica, si direbbe che appare urgente riflettere sulle grandi possibilità da essi offerte, ma pure sui grandi pericoli che potrebbero scaturire dalla loro utilizzazione acritica e generalizzata. E tra questi vorremmo qui ricordare appunto il concentrare l'interesse dei discenti sulla risposta al problema in sé, piuttosto che sulla procedura di soluzione e sulla valutazione del percorso logico che si tiene per giungere ad essa.

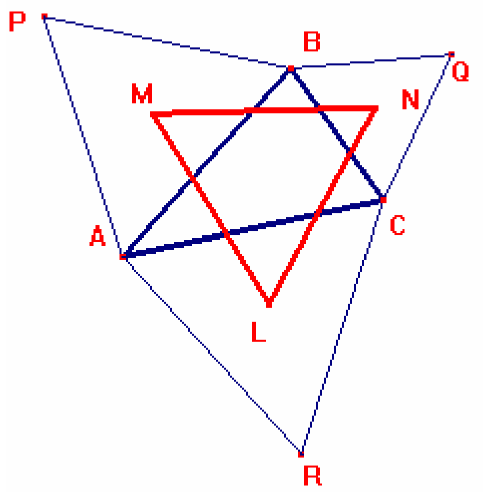
2. Come è stato detto, la strada scelta da chi risolve un problema matematico dipende ovviamente dalla cultura dell'operatore, ma anche dai suoi gusti e dai giudizi, spesso quasi inconsci, sulla chiarezza e sull'efficacia di certe argomentazioni confrontate con altre, dai punti di partenza, dalle nozioni che si ritengono acquisite, da quelle che si considerano più feconde di conseguenze rispetto ad altre; in una parola l'analisi delle procedure di soluzione di un problema può dare informazioni sulla psicologia dell'operatore, o addirittura rendere chiaro a questi l'insieme dei sottofondi (per così dire) sui quali si basano i procedimenti da lui scelti.
A questo proposito ricordiamo che Henri Poincaré, in un suo discorso, pronunciato al congresso mondiale dei matematici che si svolse a Parigi all'inizio di questo secolo, mise in luce due atteggiamenti che rivelano la fisionomia fondamentale dei matematici, nella creazione e nella soluzione dei problemi; tali due atteggiamenti erano da Poincaré presentati come atteggiamento dell'analista ed atteggiamento del geometra. Ed aggiungeva Poincaré che tale distinzione non era fondata sui contenuti delle ricerche: perché si possono trattare dei contenuti geometrici con la mentalità dell'analista, e fare dell'analisi matematica con l'atteggiamento del geometra.

3. Fatte queste precisazioni e queste premesse, vorremmo cogliere l'occasione per applicarle alle procedure di dimostrazione di un teorema di geometria elementare che ha una sua (relativa) fama storica. Tale teorema infatti viene chiamato "di Napoleone" perché una certa aneddotica storica, sulla cui validità non prendiamo posizione, vuole che esso sia stato proposto per la dimostrazione dall'imperatore Napoleone a Lagrange (Joseph-Louis Lagrange 1736-1813).

   La proposizione da dimostrare potrebbe essere enunciata come segue:

   Considerato un triangolo, se si costruisce su ciascuno dei suoi lati un triangolo equilatero (che giaccia da parte opposta al triangolo rispetto alla retta su cui si trova il lato), i baricentri dei tre triangoli così costruiti sono a loro volta vertici di un triangolo equilatero.

Fig. 1



Ripetiamo ancora che, nell'ordine d'idee che abbiamo scelto di seguire, il contenuto del teorema appare in certo modo secondario rispetto all'analisi delle possibili procedure di dimostrazione.

Presenteremo qui di seguito tre dimostrazioni di tale proposizione; la prima sarà data secondo le linee della geometria elementare classica **assistita**. Riteniamo opportuno cercare di spiegare il significato di

Fig. 2

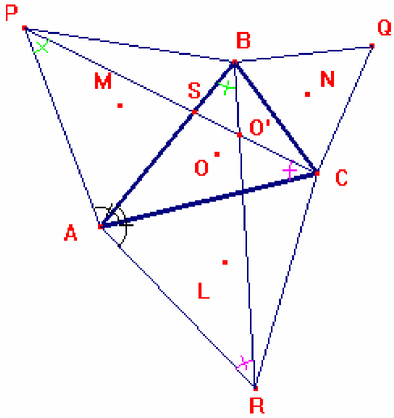
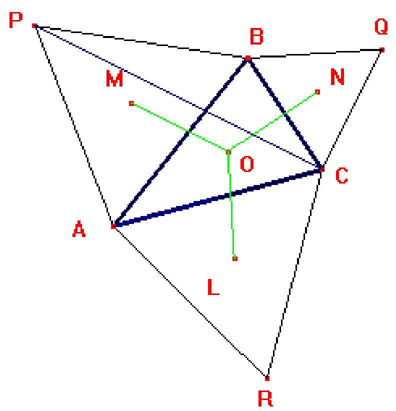


Fig. 3



questo ultimo termine: esso vorrebbe dire che per questa soluzione si segue la strada già indicata da Euclide e Pappo, strada che consiste nell'immaginare il problema già risolto (o il teorema già dimostrato) e del dedurre via via le conseguenze necessarie da queste ipotesi fino a giungere ad una proposizione già ammessa o già dimostrata prima, e nel rifare poi a ritroso il percorso logico. Chiamiamo "**assistita"** questa dimostrazione perché in essa ci si avvale del programma CABRI, per poter osservare in partenza la mutua posizione degli oggetti geometrici interessati e per ottenere suggestioni e stimoli dall'osservazione delle situazioni che nascono da eventuali diverse scelte dei dati iniziali.

Impostata graficamente la figura sfruttando l'ambiente CABRI (fig. 1), è del tutto spontaneo iniziare ad accettare i suggerimenti che la variabilità della situazione iniziale può dare, anzi a sollecitarli scegliendo posizioni sia casuali che più meditate. Si ha subito l'impressione che i baricentri dei triangoli ABC e MNL) coincidano, cosa che si può facilmente verificare.

La verifica induce ad unire i baricentri dei triangoli ABP, BCQ e ARC con quello di ABC, O (vedi figura 3) e “si vedono” tre segmenti uguali. Lo sono veramente? **Questo è da dimostrare**, ma la costruzione rende vero il fatto che il segmento MO che congiunge i due baricentri (M e O dividono le mediane in parti proporzionali a 2 e 1) è parallelo al segmento PC ed è 1/3 di esso (non ne portiamo la dimostrazione perché di facile conclusione). Allora il problema si sposta a dimostrare che PC = BR =AQ e fatto questo si è poi in grado di dimostrare la presenza del triangolo equilatero richiesto. Vedi figura 2

Tracciando PC e BR si nota velocemente che i triangoli APC e ABR sono uguali perché hanno gli angoli PAC e BAR uguali come somma di angoli uguali, e i lati AP = AB e AR = AC per costruzione. In particolare sarà PC = BR come si voleva dimostrare.

Ugualmente si può dimostrare che sono simili i triangoli APS e BSO’. Per la dimostrazione precedente sono infatti uguali gli angoli SBO’ e APS e sono uguali gli angoli PSA e BSO’ perché opposti al vertice. Allora l’angolo PO’B è 60° e l’angolo PO’R 120°.

Rifacendo la dimostrazione relativamente ai segmenti PC e AQ troveremmo le stesse conclusioni e possiamo affermare non solo che i tre segmenti sono uguali tra di loro, ma che si intersecano in uno stesso punto O’. Il segmento AO’ crea infatti in O’ l’angolo AO’S di 60° perché i triangoli AO’S e SPB sono simili in conseguenza della similitudine di APS e SBC. AQ dovendo intersecare PC formando lo stesso angolo non può che essere la retta che contiene AO’.

Ritorniamo a questo punto ad analizzare la figura 3).

Possiamo dire di aver dimostrato che i tre segmenti MO, NO, LO sono tra di loro uguali come terza parte di segmenti uguali, ma anche che, essendo paralleli alle rette PC, BR e AC si tagliano con angoli di 120°. I punti M, N, L sono allora vertici di un triangolo equilatero.

Come si era supposto **MNL è equilatero.**

Una breve riflessione sulle procedure adottate potrebbe portare ad osservare che riga e compasso, come oggetti, implicano la funzione per la quale sono stati progettati, benchè sia individuale la capacità di sfruttare le loro potenzialità. Dietro a CABRI c’è invece una mente che ha definito le potenzialità del programma sulla base di

determinate finalità didattiche tese a favorire una certa concettualizzazione (pur lasciando all'utente una quasi totale libertà di azione). Tale concettualizzazione mira ad esaltare le relazioni tra un oggetto geometrico e le sue possibili rappresentazioni (C.Laborde). Si può pensare che un uso intelligente della "modificazione" e in generale della dinamicità insita nel programma, comporti un continuo riferimento al concetto e ad un suo progressivo arricchimento.
Pare che CABRI produca forti sollecitazioni a quella che è chiamata abitualmente intuizione. Chiedersi poi **il perché** diventa propedeutico alla dimostrazione, conduce **alla necessità** della dimostrazione e alla discussione sul perché dopo una dimostrazione non ci sia bisogno di un'azione di verifica (momenti di alto valore didattico).
Sperimentando come adulti un itinerario d'impostazione, modellizzazione, soluzione intuitiva e dimostrazione sfruttando lo strumento CABRI nel teorema considerato e in altri elementari, possiamo notare come il dinamismo del linguaggio, unito ad un'abitudine ai riferimenti concettuali, non solo sollecita l'intuizione, ma anche il corretto riferimento alle conoscenze.
Non possiamo però far a meno di riflettere sul fatto che in alcuni momenti, il suggerimento non è più solo tale, ma diviene una sorta di produzione di immagine risolutiva, che forse non sarebbe potuta venire in mente coll'analisi di un disegno con carta e matita. Ci si chiede che cosa, in tal modo, si perda e si acquisti di utile lavoro mentale di coordinamento e relazioni.

4. La dimostrazione ora esposta potrebbe essere sostituita da una procedura che fa ricorso a calcoli trigonometrici, che possono essere posti in luogo delle argomentazioni elementari e permettono quindi di trasformare in calcoli algebrici le procedure deduttive classiche.

Sia <ABC> un triangolo e sia O il centro della circonferenza Γ circoscritta; quindi i lati del triangolo sono corde della Γ.
Indichiamo con α, β, γ i tre angoli interni del triangolo che hanno i loro vertici rispettivamente in A, B, C.

Supponiamo che il raggio di Γ sia uguale ad 1; è facile convincersi che questa scelta non pregiudica la generalità dei risultati; essa tuttavia permette di semplificare i calcoli.
Chiamiamo M il piede della perpendicolare calata da O sul lato <BC>; sia A' il vertice del triangolo equilatero costruito sul lato <BC>, in modo che A' ed O siano da parti opposte rispetto alla retta <BC>.
Sia poi A_0 il baricentro del triangolo <BCA'>.
Per noti risultati di geometria elementare, il punto M è medio del lato <BC>; inoltre si ha:

(1) angolo (MOC) = angolo (BAC) $=\alpha$

Indichiamo qui con θ la soluzione dell'equazione:

(2) $3\,\theta^2 = 1$

Per le supposizioni fatte si ha:

(3) $OM = \cos\alpha$; $MC = \operatorname{sen}\alpha$;
$MA_0 = \theta \operatorname{sen}\alpha$

e quindi sarà.

(4) $OA_0 = OM + MA_0 = \cos\alpha + \theta \operatorname{sen}\alpha$

Con costruzioni e notazioni analoghe si avrà:

(5) $OB_0 = \cos\beta + \theta \operatorname{sen}\beta$

$OC_0 = \cos\gamma + \theta \operatorname{sen}\gamma$

E poniamo anche:

angolo (A_0OB_0) = $\gamma_0 = \alpha + \beta$

angolo (B_0OC_0) = $\alpha_0 = \beta + \gamma$

$$\text{angolo } (C_0OA_0) = \beta_0 = \gamma + \alpha$$

Si osservi che si ha ovviamente:

$$(6) \qquad \alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 = 2\pi$$

In forza di un classico teorema di Carnot si ha:

$$(7) \qquad A_0B_0^2 = OA_0^2 + OB_0^2 - 2\, OA_0\, OB_0 \cos \gamma_0$$

e valgono anche le altre due relazioni che si ottengono da questa circolando sulle lettere A, B, C, ed α, β, γ.
Sostituendo in queste formule le espressioni fornite dalla 4) e dalle due analoghe, e tenendo conto della 6), si ottiene:

$$(8) \qquad A_0B_0^{\,2} = B_0C_0^{\,2} = C_0A_0^{\,2}$$

E queste relazioni garantiscono che il triangolo $\langle A_0B_0C_0 \rangle$ è equilatero.

5. Presentiamo infine una terza dimostrazione la quale sfrutta in modo sistematico certe trasformazioni geometriche elementari. Esse sono qui esposte con l'ausilio delle interpretazioni geometriche dei calcoli con i numeri complessi, ma ovviamente potrebbero essere esposte, se pure in forma meno agile, anche senza richiami di questo tipo.
   Appare forse di qualche interesse il fatto che nella procedura dimostrativa il gruppo delle operazioni algebriche risulta avere come immagine il gruppo delle operazioni geometriche che portano in sé la terna dei punti costruiti. Pertanto il fatto che il triangolo costruito sia equilatero viene dedotto dalla sua invarianza rispetto ad un determinato gruppo di operazioni geometriche elementari. (le rotazioni di 120° e di 240°). E ciò si riattacca a certa possibili osservazioni sul concetto di simmetria che potrebbe trovare applicazioni forse più interessanti in campi anche più estesi di quello della geometria elementare, qui preso in considerazione.

Nel piano di Gauss della variabile complessa

$$(1) \qquad z = x + iy$$

siano dati tre punti : a, b, c, immagini di tre numeri complessi Indichiamo ancora con gli stessi simboli i tre vettori, ciascuno dei quali ha il vertice nell'origine ed ha come secondo estremo uno dei punti.
Supponiamo valida l'ipotesi

$$(2) \qquad a + b + c = 0$$

la quale esprime che l'origine sia stata scelta nel baricentro del triangolo <a,b,c>.

<u>OSSERVAZIONE 1</u>.- E' facile convincersi che questa scelta non pregiudica la validità delle argomentazioni che seguono ; tuttavia essa facilita i calcoli.

Indichiamo con α una radice cubica dell'unità diversa da 1 ; come è noto, α è radice dell'equazione quadratica

$$(3) \qquad \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$$

e si ha ovviamente

$$(4) \qquad \alpha^3 - 1 = 0$$

Ricordiamo ora che, considerato un qualunque vettore z del piano di Gauss, la moltiplicazione di z per α provoca una rotazione di z di 120 gradi in senso positivo. In generale si ottengono rotazioni di
60, 120, 180 240 300 gradi in verso positivo (antiorario), moltiplicando rispettivamente per
$-\alpha^2 \quad \alpha \quad -1 \quad \alpha^2 \quad -\alpha$
Sia ora c' il vertice del triangolo equilatero costruito sul lato <a,b> del triangolo dato, e supponiamo che c' sia costruito in modo da stare

dalla parte opposta di c rispetto al lato in parola. Sia poi c_o il baricentro del triangolo <a,b,c'>. Si ha dunque

$$3\, c_o = a + b + c' \tag{5}$$

OSSERVAZIONE 2.- Supponiamo ora (come è sempre possibile) che i vertici a, b, c sul perimetro del triangolo originale siano disposti in modo che il percorso del perimetro stesso nel senso a $\rightarrow$ b $\rightarrow$ c lasci a sinistra l'interno del triangolo stesso. In questa ipotesi, il vettore (c' – a) si ottiene ruotando di 60 gradi in verso orario (negativo) il vettore (b – a) ; si ha quindi :

$$c' - a = -\alpha\,(b - a) \tag{6}$$

ossia :

$$c' = a\,(1 + \alpha) - \alpha\, b \tag{7}$$

e, dalla (3)

$$c' = -\alpha^2\, a - \alpha\, b \tag{8}$$

Quindi, dalle (3) e (5) si ottiene in definitiva

$$c_o = -\,\frac{\left(\alpha^2 \cdot a + \alpha \cdot b + c\right)}{3} \tag{9}$$

OSSERVAZIONE 3 .- Gli altri due vertici : a_o e b_o del triangolo dei baricentri si ottengono con considerazioni analoghe, e quindi con formule analoghe alla (9) ; più precisamente con formule che si ottengono dalla (9) circolando sulle lettere (a,b,c) :

$$a_o = -\,\frac{\left(\alpha^2 \cdot b + \alpha \cdot c + a\right)}{3} \tag{10'}$$

$$bo = -\frac{\left(\alpha^2 \cdot c + \alpha \cdot a + b\right)}{3} \tag{10''}$$

Ma si osserva anche che si ha, tenendo conto di (3) e (4),

$$(11) \qquad a_o = \alpha\, c_o \;; \qquad b_o = \alpha\, a_o$$

Pertanto il triangolo dei baricentri è mutato in sé stesso da una rotazione di 120 gradi attorno all'origine.

6. Il confronto delle procedure di dimostrazione che abbiamo presentato potrebbe offrire lo spunto per varie osservazioni, che possono forse avere qualche utilità anche nella didattica.
   Si può notare anzitutto che ognuna di esse rientra nello schema logico classico, già esposto da Euclide e da Proclo e già ricordato sopra. Pertanto si potrebbe dire che le varie dimostrazioni differiscono per la tecnica deduttiva che si adotta: infatti nella prima la deduzione è svolta nella forma verbale, tipica della logica classica. A proposito della seconda si potrebbe dire che, come è noto, il simbolismo della trigonometria condensa, per così dire, alcuni teoremi elementari , che altrimenti andrebbero richiamati ed esposti verbalmente. Analoghe considerazioni si potrebbero svolgere a proposito dei calcoli algebrici che si eseguono, sulle funzioni trigonometriche coinvolte. A loro volta questi calcoli costituiscono l'applicazione delle leggi della sintassi dei simboli adottati e quindi realizzano, in forma simbolica e formale, le deduzioni che altrimenti, svolte in forma verbale, sarebbero più lunghe e forse meno chiare
   Si può anche osservare che, quando si scelgono opportunamente i simboli che rappresentano gli elementi geometrici coinvolti, l'operazione di sostituzione circolare sui simboli adottati permette di far sì che i calcoli siano accorciati ed anche facilmente controllati.
   Infine, per quanto riguarda la terza dimostrazione, si può osservare che la struttura del campo complesso permette di rappresentare, in forma spedita e semplice, alcune trasformazioni del piano su se stesso. E' quindi possibile ambientare la dimostrazione nell'ambito della teoria delle trasformazioni e risulta più facile interpretare l'operazione di sostituzione circolare sui simboli come un'operazione geometrica, resa possibile dalla proprietà della figura che si considera.

Riflettendo sulle osservazioni fatte finora, pensiamo che valga la pena di evidenziare quanti e quali problemi di carattere logico, psicologico, epistemologico, linguistico espressivo, si pongono a chi volesse sfruttare in classe il suggerimento della molteplicità delle possibili dimostrazioni di un teorema.

Si potrebbe inoltre osservare che l'introduzione del supporto informatico permette di approfondire in generale il carattere logico e linguistico necessari al contesto matematico nel quale si opera e porta ad un nuovo rivoluzionario ambito epistemologico. Come per esempio, si potrebbe operare un itinerario "assistito" anche nelle due altre soluzioni del teorema proposto? Quali suggestioni ne deriverebbero? Tutti sappiamo infatti che il lavoro reale del matematico non procede come si evidenzia nelle dimostrazioni rigorose. Ognuno, nella sua creatività, trae suggerimento dalla cultura personale e da come l'ha sistemata e in qualche modo "vede" spesso la soluzione prima della dimostrazione. L'informatica sta forse cambiando la sistemazione della conoscenza?

NOTA DELLA REDAZIONE

Un quarto tipo di soluzione lo si può trovare nel volume

Trasformazioni geometriche
LE ISOMETRIE
di Isaac Yaglom[1]

edito da Zanichelli nella collezione MM (Matematica Moderna), Bologna, 1972.

Data la brevità della dimostrazione e la sua eleganza e anche perché questo volume è molto probabilmente esaurito, mi pare opportuno riprodurlo per i nostri lettori. Sono grato alla Collega Prof. Clara Colombo Bozzolo che mi ha segnalato questa dimostrazione.

[1] Si tratta della traduzione del I° volume dell'opera in tre volumi di I.M.Yaglom ripresa dalla traduzione inglese "Geometric Transformations I" pubblicata dalla Random House & L.W.Singer Co. nella collana NEW MATHEMATICAL LIBRARY. E' un vero peccato che i tre volumi non siano stati tutti tradotti.